Fach: Mathematik

Niveau: Abitur

Thema: e-Funktion

Inhalt:

Die e-Funktion

Allgemeines

Die e-Funktion gehört zu den Exponentialfunktionen. Sie unterscheidet sich daher von Potenzfunktionen, dass die Variable hier nicht in der Basis steht, sondern in der Potenz:

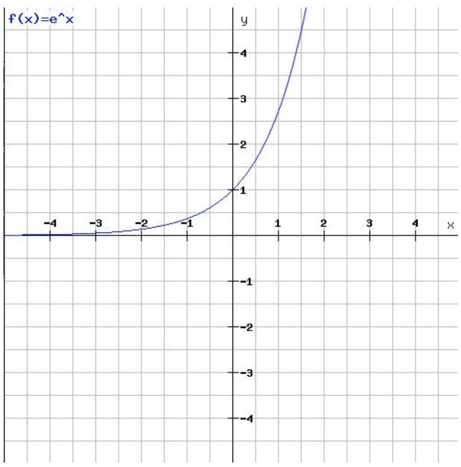
Potenzfunktion: $f(x) = x^2$

Exponentialfunktion: $f(x) = e^x$

Die e-Funktion ist eine sehr einzigartige Funktion, da sie einige besondere Merkmale aufweist:

1. Der Graph der e-Funktion verläuft oberhalb der x-Achse
2. Der Graph der e-Funktion ist extrem nahe an der x-Achse, berührt sie aber nicht.
3. Die e-Funktion schneidet die Y-Achse am Punkt (0/1)
4. Der Graph ist streng monoton steigend.
5. Beim Ableiten der e-Funktion bleibt der Exponent unverändert. Nur der Koeffizient vor der Variable wird mit dem Term multipliziert.
6. Die Umkehrfunktion von $f(x)=e^x$ ist $g(x)=\ln(x)$
7. e ist eine eulersche Zahl, die den Wert 2,718182…. besitzt.

Graphisch sieht die Funktion $f(x) = e^x$ folgendermaßen aus:

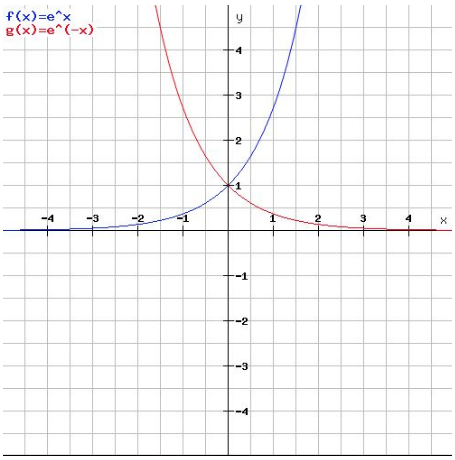


Die e-Funktion

<u>*Veränderung der e-Funktion*</u>

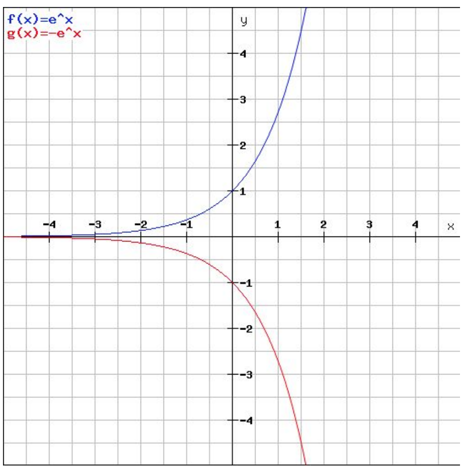
Spiegelung an der Y-Achse

Wenn der Exponent der e-Funktion negativ gesetzt wird, dann spiegelt sich die Funktion entlang der y-Achse. Also f(x) = e^{-x} :



Spiegelung an der x - Achse

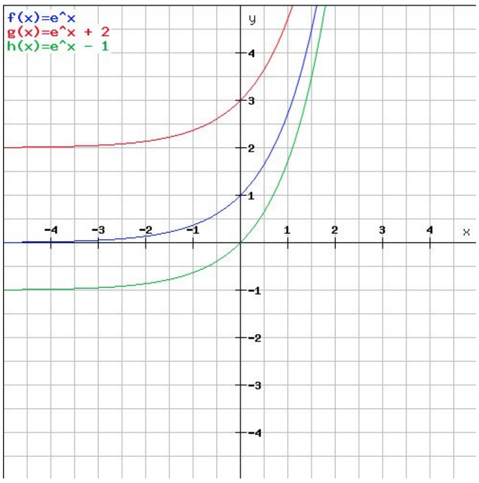
Wenn aber der Exponent positiv bleibt und der ganze Term negativ gesetzt wird, dann spiegelt sich der Funktion an der x-Achse. Also f(x) = - e^{x} :



Die e-Funktion

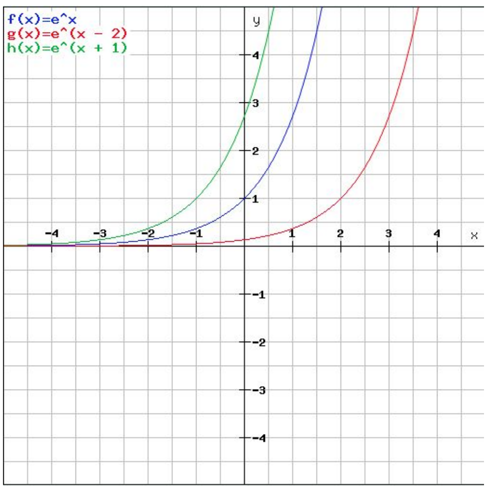
Verschiebung in y-Richtung

Die Verschiebung der e-Funktion in y-Richtung ist sehr simpel. Dazu müssen wir lediglich an Ende des Terms den Wert hinzurechnen, den wir für eine Verschiebung wünschen. Wenn wir also möchten, dass die e-Funktion um zwei Einheiten nach oben geschoben wird, dann würde unser Term lauten: $f(x) = e^x + 2$
Um eine Verschiebung von zwei Einheiten nach unten zu verursachen, subtrahieren wir die gewünschte Menge einfach von dem Term. Eine Verschiebung um einer Einheit nach unten wäre dann $f(x) = e^x - 1$



Verschiebung in x - Richtung

Hier gilt dasselbe, wie bei der y - Richtung. Der Unterschied ist hier aber, dass wir die erwünschte Veränderung nicht einfach hinter den Term setzen, sondern an den Exponenten anzuhängen. Allerdings muss hier die Veränderung hier negativ erfolgen!
Verschiebung um 2 Einheiten nach rechts: $f(x) = e^{x-2}$
Verschiebung um 1 Einheit nach links: $f(x) = e^{x+1}$



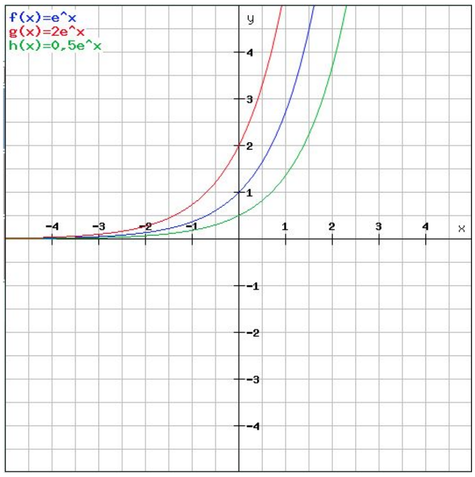
Die e-Funktion

Streckung in y-Richtung

Um die Funktion in y-Richtung zu strecken, multiplizieren wir den ganzen Term mit dem gewünschten Streckungsfaktor.

Eine Streckung um 2: $f(x) = 2e^x$

Eine Streckung um 0,5: $f(x) = 0{,}5e^x$

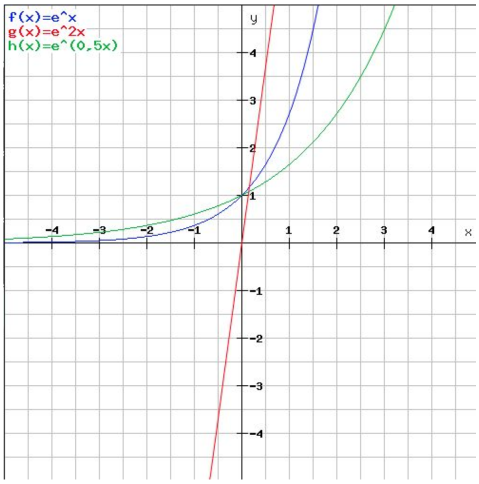


Streckung in x-Richtung

Um die Funktion x-Richtung zu strecken, multiplizieren wir den Exponenten mit dem gewünschten Streckungsfaktor.

Eine Streckung um 2: $f(x) = e^{2x}$

Eine Streckung um 0,5: $f(x) = e^{0{,}5x}$



Die e-Funktion

Kurvendiskussion der e-Funktion

Wie im Punkt *Allgemeines* schon angeschnitten, verändert sich der Exponent der e-Funktion nicht, der Koeffizient im Exponenten wird aber mit dem Term multipliziert.

Beispiel: $f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$

Da der Koeffizient im Exponent vor der Variable 1 ist, verändert sich die Funktion hier überhaupt nicht.

$f(x) = 2e^{2x} \rightarrow f'(x) = 4e^{2x}$

*Der Koeffizient 2 wird vor den Term gesetzt und 2*2=4. Der Exponent bleibt in der Ableitung gleich.*

Typische Aufgabe zur e-Funktion im Abitur:

$f(x) = 2x * e^{-0,1x}$ | Produktregel zum Ableiten $f'(x) = u * v' + u' * v$

$u = 2x$ $v = e^{-0,1x}$

$u' = 2$ $v' = -0,1e^{-0,1x}$

$f'(x) = (2x) * (-0,1e^{-0,1x}) + (2) * (e^{-0,1x})$ | Um den Term zusammenzufassen, rechnen wir 2x * -0,1

$f'(x) = (-0,2x) * (-e^{-0,1x}) + (2) * (-e^{-0,1x})$ | Da beide Produkte $(-e^{-0,1x})$ als Faktor haben, lässt sich der Term zusammenfassen.

$f'(x) = - e^{-0,1x} * (2 - 0,2x)$

Übung 1

Ermittle $f''(x)$ und $f'''(x)$

Übung 2

Ermittle die ersten 3 Ableitungen der Funktion $f(x) = (1-x) * e^{0,5x}$

Übung 3

Ermittle die ersten 3 Ableitungen der Funktion $f(x) = (x+2) * e^x$

Die e-Funktion

Nullstellenberechnung der e-Funktion

Da wir festgelegt haben, dass die e-Funktion, dass die e-funktion die x-Achse nicht berührt, hat sie dementsprechend auch keine Nullstellen. Trotzdem kommt es vor, dass wir manchmal eine Kurvendiskussion mit einer e-Funktion durchführen müssen. Dies funktioniert dann, wenn die e-Funktion nicht alleine steht.

Beispiel zur Berechnung von Hoch- Tief- und Wendepunkt:
$f(x) = 8x * e^{-x}$
$f'(x) = (8 - 8x) * e^{-x}$
$f''(x) = (8x - 16) * e^{-x}$
$f'''(x) = (24 - 8x) * e^{-x}$

1. f'(x) = 0 und Nullstellen berechnen:

   $f'(x) = (8 - 8x) * e^{-x} = 0$ I Da die e-funktion keine Nullstellen besitzt, betrachten wir nur den restlichen Term.

   $e^{-x} \rightarrow$ Keine Nullstellen

   $(8 - 8x) = 0$ I +8x
   $8 = 8x$ I :8
   $\underline{1} \quad \underline{= x}$

2. Nullstellen aus f'(x) in f''(x) einsetzen, um zu ermitteln, ob es sich um einen HP oder einen TP handelt.

   $f''(1) = (8*1 - 16) * e^{-1} = \underline{-2{,}94} < 0 \rightarrow$ HP

3. Nullstelle aus f'(1) in f(x) einsetzen, um HP Koordinaten zu ermitteln.

   $f(1) = 8*1 * e^{-1} = \underline{2{,}94} \rightarrow$ HP (1 / 2,94)

4. f''(x) = 0 und Nullstellen berechnen

   $f''(x) = (8x - 16) * e^{-x} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{x = 2} \quad \rightarrow$ X - Koordinate des WP

5. Nullstelle aus f''(x) in f(x) setzen, um WP Koordinate zu erhalten.

   $f(2) = 8*2 * e^{-2} = \underline{2{,}17} \rightarrow$ WP (2 / 2,17)

Übung 4
Ermittle alle Extrema der Funktion: $f(x) = (2x + 2) * e^{0,5}$

Die e-Funktion

Lösung der Übungsaufgaben:

Übung 1

$f''(x) = e^{-0,1x} * (0,02x - 0,4)$

$f'''(x) = e^{-0,1x} * (-0,002x + 0,06)$

Übung 2

$f'(x) = (-0,5 - 0,5x) * e^{0,5x}$

$f''(x) = (-0,75 - 0,25x) * e^{0,5x}$

$f'''(x) = (-\frac{5}{8} - \frac{1}{8}x) * e^{0,5x}$

Übung 3

$f'(x) = (x + 3) * e^{x}$

$f''(x) = (x + 4) * e^{x}$

$f'''(x) = (x + 5) * e^{x}$

Übung 4

TP (3 / -0,89)

WP (-5 / -0,66)